УДК 372.853+37.025.7:53.05

Мінаєв Ю.П., Лозовенко О.А., Ліпський А.С.

НАОЧНЕ ПОЯСНЕННЯ ДЕЯКИХ ПАРАДОКСІВ ЖОРСТКИХ ПРУЖИН

У статті розглядається так званий "парадокс жорстких пружин". Він виникає при перевірці відповідей фізичних задач певного класу на граничні випадки. Для унаочнення пояснення цього парадоксу пропонується використати можливості комп'ютерного експерименту. Докладно розібрані дві задачі з парадоксальними відповідями.

Ключові слова: *комп'ютерний експеримент, критичне мислення, парадокс жорстких пружин, дидактика фізики, навчальні дослідження.*

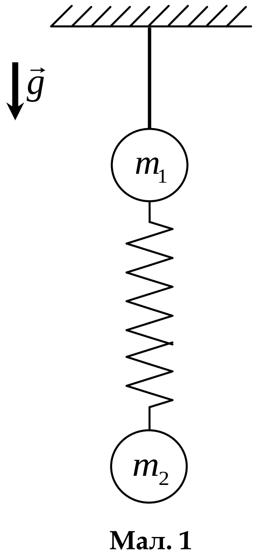
Постановка проблеми. Цією публікацією ми хочемо звернути увагу читачів на дві фізичні задачі та пов'язані з ними парадокси, пояснення яких, на наш погляд, корисно супроводжувати віртуальними експериментами. Мова йде про відомі шкільні задачі, у яких розглядається рух двох тіл, з'єднаних пружиною. Справа у тому, що, на перший погляд, відповіді до цих задач не витримують перевірки на граничний випадок. Так, після отримання остаточних формул, природно розглянути ситуацію, коли жорсткість пружини прямує до нескінченності, тобто коли пружина "перетворюється" на стрижень. Але як виконати цю перевірку, якщо жорсткість пружини не входить до кінцевої формули? Тож маємо досить дивну ситуацію: життєвий досвід підказує, що відповіді все ж таки мають залежати від коефіцієнтів жорсткості пружин, але це суперечить відповідям, які наведені в задачниках до цих задач.

Наш досвід показує, що ймовірність того, щоб учень або студент без додаткової самостійної роботи і допомоги досвідченого викладача зміг розкрити подібні парадокси, є малою. Отже, розробка матеріалів, які б дозволили *наочно* пояснити парадокси, що виникають у задачах про тіла, з'єднані пружинами, є вельми **актуальною справою**.

Аналіз попередніх публікацій. У статті [3] був розглянутий "парадокс жорстких пружин" на прикладі, який є дещо складнішим, ніж ті, з яких ми пропонуємо розпочати знайомство з ним учнів і студентів. До того ж, у згаданій статті наведені лише результати відповідного комп'ютерного моделювання без детальних пояснень.

Крім того, нам вдалося знайти англомовну статтю [1], де автори розглядають рух іграшки, яка завдяки пружині може підстрибувати, якщо достатньо сильно натиснути на верхню частину іграшки, а потім відпустити. Автори не звертають уваги на парадоксальність отриманого ними виразу для умови стрибка (вона не залежить від жорсткості пружини), хоча і доволі докладно розглядають ситуацію.

Виклад основного матеріалу нашої статті буде присвячений докладному розгляду двох випадків руху тіл, з'єднаних пружиною. Також ми продемонструємо, як програмне забезпечення, розроблене у межах МАНівської роботи учнем 10-го класу Андрієм Ліпським, дає можливість проводити віртуальні експерименти, змінюючи в певних межах маси тіл і коефіцієнт жорсткості пружини.



Мал. 1

Пружина, що падає. Відомою є така задача: дві кульки однакової маси ($m_1 = m_2 = m$) з'єднані невагомою пружиною і підвішені на нитці до стелі так, як показано на мал. 1. Нитку перерізають. Знайти прискорення кульок одразу після перерізання нитки (див., наприклад, [4]).

Стандартний розв'язок такий. Оскільки у початковий момент сили, що діють на нижню кульку, не змінилися, її початкове прискорення $a_2(0) = 0$. Що ж до верхньої кульки, то ситуація інша. Одразу після перерізання нитки на неї діятиме сила $2mg$. Отже, $a_1(0) = 2g$.

Отримані відповіді не залежать від коефіцієнта жорсткості пружини. Цей результат може здивувати. Дійсно, якщо коефіцієнт жорсткості не входить до відповіді, то його можна взяти будь-яким. Але за умови дуже жорсткої пружини її можна замінити на стрижень і розглядати дві кульки, з'єднані стрижнем, як одне тіло, яке після перерізання нитки буде падати з прискоренням g, тобто $a_1(0) = a_2(0) = g$. Як пояснити таке протиріччя?

Для розкриття сутності описаного парадокса корисно порівняти, як впливає коефіцієнт жорсткості пружини на залежності від часу відстані між кульками і їхнього відносного прискорення. До перерізання нитки пружина буде розтягнута на величину mg/k. Після перерізання нитки центр мас буде падати з прискоренням g, а відстань між кульками змінюватиметься за законом $l(t)=l_0+\frac{mg}{k}\cos\omega t$, де l_0 – відстань між кульками, коли пружина не деформована, а $\omega=\sqrt{2k/m}$ – циклічна частота коливань.

Як бачимо, амплітуда коливань прямуватиме до нуля, якщо коефіцієнт жорсткості пружини збільшувати до нескінченності. Отже, буде складатися враження, що відстань між кульками залишається незмінною. Це може привести до хибного висновку, що відносні швидкості і прискорення кульок дорівнюють нулю. Якщо ж не покладатися на таку очевидність, а чесно двічі продиференціювати $l(t)$, то для відносного прискорення отримаємо: $a_{relat}=-2g\cos\omega t$.

Амплітуда коливань відносного прискорення, на відміну від амплітуди коливань відстані між кульками, не залежить від k. Для прискорень відносно землі відповідно матимемо: $a_1=g(1+\cos\omega t)$, $a_2=g(1-\cos\omega t)$. У випадку $t=0$ отримаємо $a_1(0)=2g$ і $a_2(0)=0$, що співпадає з відповідями у стандартному розв'язку цієї задачі.

Головний висновок, який можна зробити на цьому етапі, полягає в тому, що непомітні (через малу амплітуду) коливання деякої величини можуть супроводжуватися досить значними коливаннями похідних за часом цієї самої величини, якщо частота коливань велика. У нашому випадку з ростом коефіцієнта жорсткості пружини росте частота коливань, але амплітуда прискорення не змінюється. Відповідно, зменшується амплітуда коливань відстані між кульками. Це і призводить до ілюзії того, що кульки падають з однаковим прискоренням g.

Цікавий результат можна отримати, якщо взяти кульки, маси яких помітно відрізняються. Нехай $M>>m$, а коефіцієнт жорсткості пружини настільки великий, що вона практично не розтягується навіть тоді, коли нижньою буде кулька масою M. За цих умов, спостерігаючи за рухом кульок, з'єднаних жорсткою пружиною, складно буде відрізнити випадок, коли нижньою буде кулька масою M ($m_2=M$), від випадку, коли нижньою буде кулька масою m ($m_2=m$). В обох випадках після перерізання нитки будемо бачити падіння суцільного тіла з прискоренням g.

А наскільки сильно будуть відрізнятися графіки залежності прискорення від часу нижньої і верхньої кульок для цих двох випадків? Ми виявили, що далеко не всі учні та студенти можуть відповісти правильно на це запитання.

Для візуалізації цих випадків було вирішено створити комп'ютерну програму, яка б для різних значень параметрів (m_1, m_2 і k) показувала рух системи після перерізання нитки і будувала графіки залежностей координат, швидкостей та прискорень тіл від часу. Зрозуміло, що для створення такої програми необхідно спочатку аналітично отримати залежності координат кульок від часу. Ця задача не є складною, але для зручності читачів, які забажають використати дану статтю у навчальному процесі, ми наведемо основні етапи розв'язку.

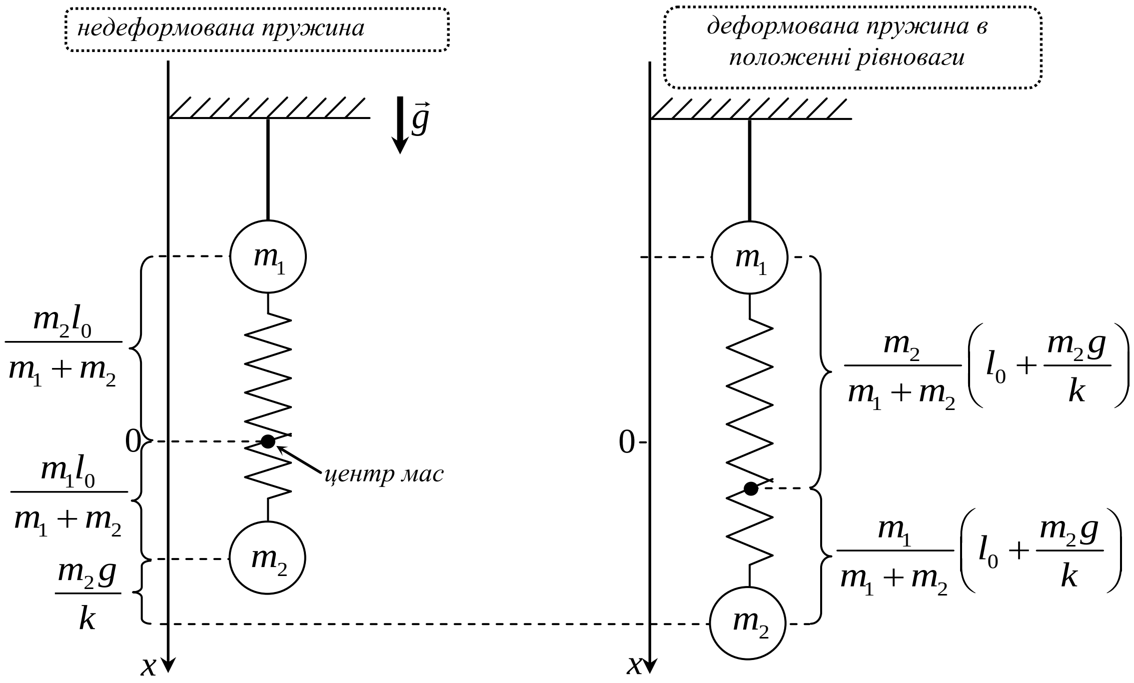
Розглянемо рух кульок, спрямувавши донизу вісь, нульове значення на якій відповідає положенню центра мас системи, коли пружина недеформована (див. мал. 2). Тоді координати тіл після перерізання нитки будуть змінюватися з часом так:

$$x_1(t)=-A_1\cos\omega_1 t+\frac{gt^2}{2}-\frac{m_2 l_0}{m_1+m_2},\qquad x_2(t)=A_2\cos\omega_2 t+\frac{gt^2}{2}+\frac{m_1 l_0}{m_1+m_2},$$

де A_1 і A_2 – амплітуди коливань кульок, а ω_1 і ω_2 – циклічні частоти їхніх коливань відносно центра мас. Нескладно впевнитися, що частоти коливань кульок будуть однаковими: $\omega_1=\omega_2=\sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}=\omega$.

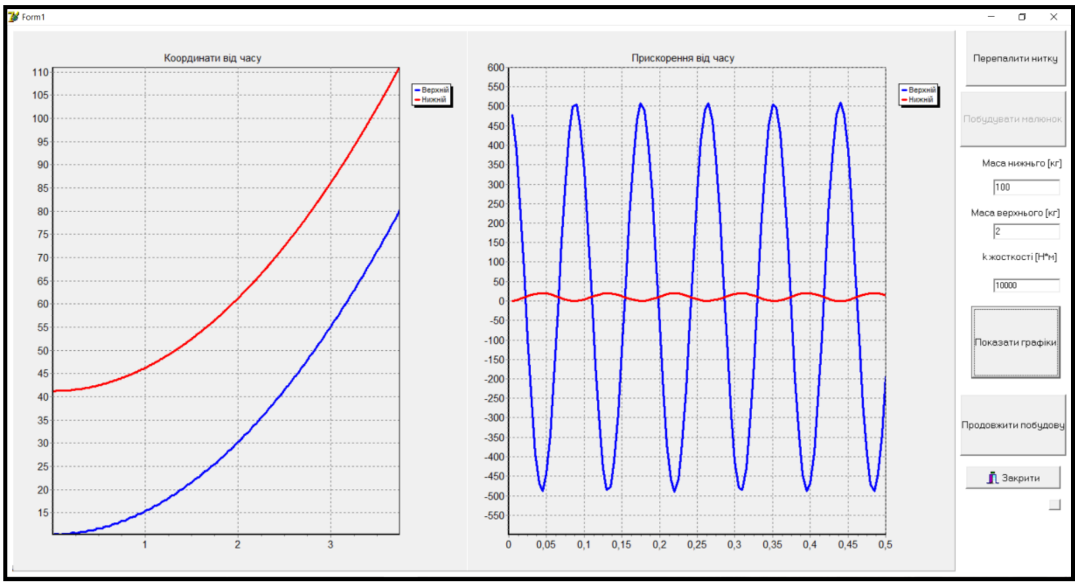
Амплітуди коливань A_1 і A_2 можна знайти як різниці між відстанями від відповідної кульки до центра мас для деформованої пружини в положенні рівноваги та у випадку недеформованої пружини:

$$A_1=\frac{m_2^2 g}{k(m_1+m_2)},\qquad A_2=\frac{m_1 m_2 g}{k(m_1+m_2)}.$$

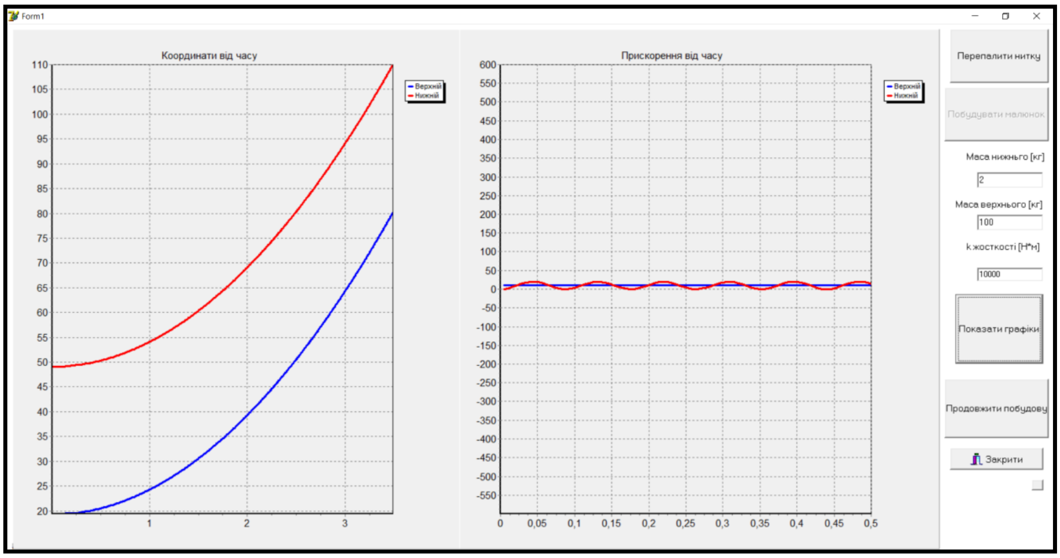


Мал. 2

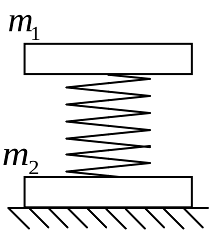
Отриманих вище формул цілком достатньо для програмування (у МАНівській роботі Андрія Ліпського воно здійснювалося у Delphi). Тепер ми можемо повернутися до питання про відмінність між графіками залежностей прискорення кульок від часу у двох випадках: коли набагато масивніша куля є нижньою, і коли куля з більшою масою, навпаки, знаходиться зверху. Дійсно, як видно з малюнків 3 та 4, графіки $x_1(t)$ і $x_2(t)$ виглядають однаково для обох випадків. А ось відмінність між графіками залежностей від часу прискорень нижньої і верхньої кульок для цих двох випадків є дуже помітною.



Мал. 3. Вигляд вікна програми у випадку, коли пружина є жорсткою, а маса *нижньої* кульки є набагато *більшою*, ніж верхньої



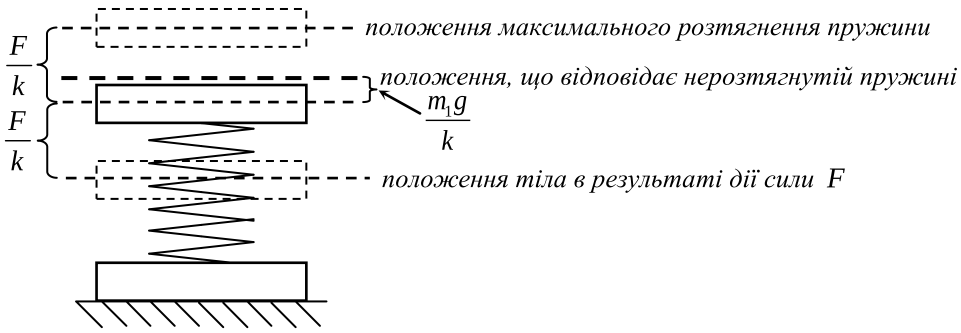
Мал. 4. Вигляд вікна програми у випадку, коли пружина є жорсткою, а маса *верхньої* кульки є набагато *більшою*, ніж нижньої



Мал. 5

Пружина, що стрибає. У багатьох збірниках задач з фізики зустрічається така задача: "Дві пластинки масами m_1 і m_2 з'єднані спіральною пружиною і розташовані так, що пластина m_1 знаходиться над пластиною m_2, яка лежить на столі (див. мал. 5). З якою силою треба натиснути на верхню пластинку, щоб після закінчення дії цієї сили верхня пластинка, підстрибнувши, підняла й нижню? Масою пружини можна знехтувати" (див., наприклад, [2]).

Наведемо один із можливих розв'язків цієї задачі. Під дією сили тяжіння на тіло масою m_1 пружина стискається на величину $m_1 g/k$, а під дією додаткової сили F – ще на відстань F/k. Після припинення дії додаткової сили пружина розпрямляється, піднімаючи верхнє тіло. Якщо б нижня пластина була прикріплена до столу, то верхня стала коливатися з амплітудою F/k (див. мал. 6).



Мал. 6

За умови $\frac{F}{k} > \frac{m_1 g}{k}$, максимальне розтягнення пружини буде мати величину $\left(\frac{F}{k} - \frac{m_1 g}{k}\right)$. Якщо сила пружності, яка виникне при цьому, буде трохи більшою за силу тяжіння, що діє на тіло m_2, то система відірветься від поверхні стола, якщо нижня пластина не буде прикріплена до стола. Тобто умова відриву виглядає так: $k \cdot \left(\frac{F}{k} - \frac{m_1 g}{k}\right) = m_2 g$, звідки нескладно отримати відповідь: $F = (m_1 + m_2) g$.

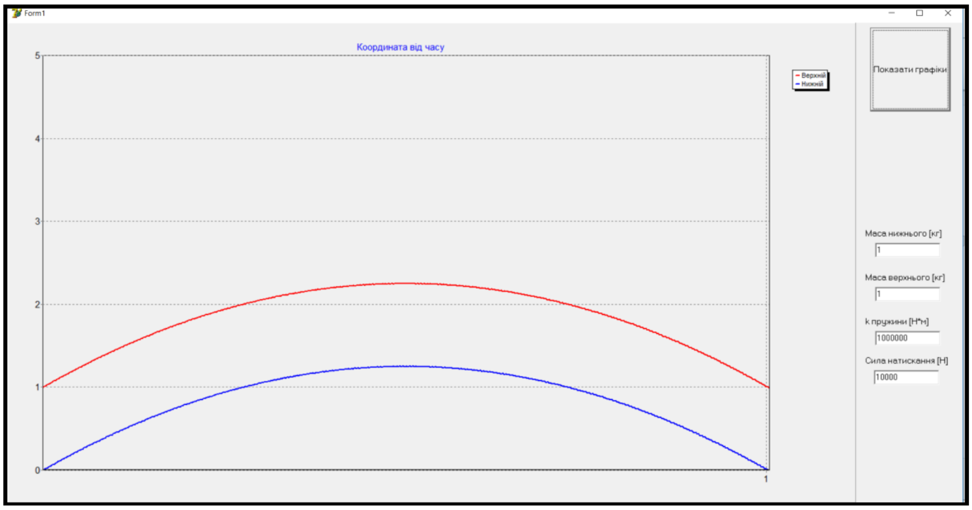
А тепер уявімо собі, що коефіцієнт жорсткості пружини, що з'єднує тіла, настільки великий, що пружина фактично є стрижнем. Зрозуміло, що при такому значенні сили ніякого підстрибування у цьому випадку не відбудеться. Однак отримана відповідь жодним чином не відображає цієї ситуації. Отже, маємо парадокс – начебто правильно розв'язана задача не витримує перевірки на очевидний граничний випадок!

Для розкриття цього парадокса розглянемо дещо спрощену ситуацію, коли маси пластин є однаковими і дорівнюють m. Тоді виконана додатковою силою робота по стисканню пружини йде лише на кінетичну енергію верхнього тіла в момент припинення взаємодії нижнього тіла зі столом та зміну потенціальної енергії у полі сили тяжіння (потенціальна енергія пружини буде такою ж, що і у положенні рівноваги): $\frac{F^2}{2k} = \frac{m(2V_0)^2}{2} + mg\frac{2mg}{k}$, де V_0 – швидкість центра мас у момент відриву. У цьому рівнянні також врахований той факт, що швидкість верхнього тіла у цей момент дорівнює $2V_0$. Знайдемо звідси швидкість центра мас системи: $V_0 = \sqrt{\frac{m}{k}\left[\left(\frac{F}{2m}\right)^2 - g^2\right]}$. Якщо сила F є великою порівняно з mg, то $V_0 \approx \sqrt{F^2/4mk}$. При цьому амплітуда коливань пластин відносно центра мас може бути малою (див. мал. 7).

Далі переформулюємо *умову підскоку нижньої пластини* так: висота підскоку має бути не меншою, ніж певне, наперед задане значення δ, яке дає можливість експериментально зафіксувати відрив. Оскільки амплітуда коливань є малою, можна вважати, що у граничному випадку максимальна висота H підйому центра мас буде приблизно дорівнювати δ. Звідси отримуємо:

$$\left.\begin{aligned} &H = \frac{V_0^2}{2g} \approx \frac{F^2}{8mgk} \\ &H \approx \delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow F \approx \sqrt{8mg\delta k} \Rightarrow F \sim \sqrt{k}\,.$$

Отже, зі зростанням жорсткості пружини сила, яку треба прикласти, щоб відбувся стрибок, буде необмежено зростати. Звернемо увагу на той факт, що в даному випадку для розкриття парадокса нам довелося відмовитися від стандартного підходу до визначення умови відриву нижньої пластини від стола. У наведеному вище стандартному розв'язку ця умова зводилася до зменшення сили реакції з боку стола до нульового значення. І такий підхід давав вираз для F, що не залежав від k. Якщо ж відрив фіксується як такий, що відбувся, лише за умови, що висота підскоку нижньої пластини перевищить нехай маленьке, але наперед задане значення δ, то F буде залежати від k, причому також прямувати до нескінченності, якщо $k \to \infty$.



Мал. 7. Залежність координат тіл від часу у випадку, коли пружина є жорсткою, сила F – великою, а амплітуда коливань малою

Для комп'ютерного моделювання руху тіл у розглядуваному випадку потрібно спочатку отримати рівняння їхнього руху. Другий закон Ньютона дозволяє записати такі диференціальні рівняння:

для першого тіла: $m_1\ddot{y}_1 = -k(y_1 - y_2 - l_0) - m_1 g$;

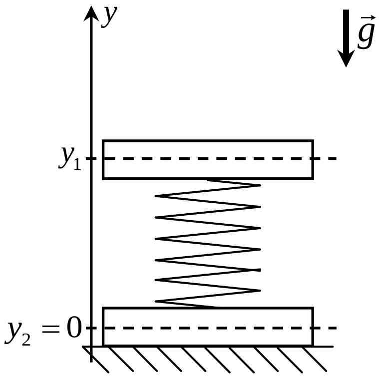
для другого тіла: $m_2\ddot{y}_2 = k(y_1 - y_2 - l_0) - m_2 g + N$,

де y_1 і y_2 – координати верхнього та нижнього тіла відповідно (див. мал. 8), l_0 – довжина пружини у нерозтягнутому стані, N – сила нормальної реакції опори, що діє на друге тіло з боку стола.

Зрозуміло, що за умови невеликих значень додаткової сили F, після припинення її дії, нижнє тіло не перестане взаємодіяти зі столом, а верхнє тіло буде здійснювати гармонічні коливання навколо положення рівноваги. При достатньо великих значеннях F для подальшого розгляду поведінки системи з двох пластин, з'єднаних пружиною, доцільно розбити її рух на дві умовні фази: 1) на цю систему діє сила з боку стола; 2) ця система рухається лише в полі сили тяжіння.

Для комп'ютерного моделювання руху тіл також була написана спеціальна програма, "скриншот" з якої використаний нами вище для ілюстрації залежностей координат тіл від часу у випадку, коли пружина є жорсткою, сила F – великою, а амплітуда коливань малою (див. мал. 8).

Висновки. У цій статті ми намагалися докладно описати процес розкриття двох парадоксів, що виникають у відомих шкільних задачах під час розгляду граничного випадку, і продемонструвати як віртуальні експериментальні установки надають можливість проводити комп'ютерні експерименти, змінюючи в певних межах маси тіл і коефіцієнт жорсткості пружини. Перший парадокс, що стосується падіння двох кульок, пояснюється тим, що непомітні зміни відстані між кульками можуть супроводжуватися значними відмінностями у швидкостях і прискореннях кульок. А другий парадокс, що стосується підстрибування двох пластин, пояснюється відмінністю тієї умови відриву нижньої пластини від підставки, яку зазвичай використовують при розв'язуванні теоретичних задач, від умови експериментальної фіксації такого відриву. У першому випадку відрив пов'язується з нульовим значенням сили тиску з боку підставки, а у другому – з підскоком нижньої пластини на певну висоту, яка дає можливість експериментально зафіксувати відрив.



Мал. 8

Використані джерела

1. Dufresne R.J., Gerace W.J., Leonard W.J. Springbok: The Physics of Jumping // The Physics Teacher, Vol. 39, February 2001. – Pp. 109-115.
2. Задачи по физике: Учеб. пособие / И.И. Воробьев, П.И. Зубков, Г.А. Кутузова и др.; Под ред. О.Я. Савченко. 3-е изд., испр. и доп. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1999. – 370 с. – С. 45., № 2.3.46.
3. Минаев Ю.П., Самойленко П.И. Цыганок М.Н. Анализ ответа физической задачи и переосмысление ключевых слов в ее условии // Среднее профессиональное образование. Ежемесячный теоретический и научно-методический журнал. – 2002. – №3. – С. 54-56.
4. Повторительный цикл по физике. Сборник задач для 11 класса / Под ред. В.В. Грушина. – М.: НИЯУ МИФИ, 2011. – 96 с. – С. 11, № 3.2.

Minaiev Yu.P., Lozovenko O.A., Lipskii A.S.

VISUAL EXPLANATION OF SOME PARADOXES ABOUT STIFF SPRINGS

The purpose of this publication is to pay reader's attention to some school physics problems those answers seem to be paradoxical and, at first glance, do not agree with a limiting case check. Solving a problem about motion of a system consisting of two masses and a spring, it is naturally enough to examine the answer by considering a case when a spring constant is going to infinity, i.e. when spring 'transforms' to a rod. But how to do it if there is no spring constant in the final formula? Thus, there is a paradox: life experience tells that the answer has to depend on the spring constant but this contradicts the final expression.

It has to be mentioned that some resembling situations have already drawn university teachers' attention and some results have been published. However, there is only the short description of computer modeling result for more complicated case in one of the articles. And the authors of the other paper set aside the paradoxicalness of obtained answer. So, developing materials which can help with explanation the paradoxes would be useful for both teachers and students.

Two situations with paradoxical answers are considered in details in the article: 1) the system starts falling after burning through a thread by which one of the masses was suspended; 2) the system jumps up from a horizontal plane after acting some force on the upper mass. It is proposed to explain the paradoxes by using a specially designed computer program which gives an opportunity to carry out virtual experiments changing masses and a spring constant. For understanding the first paradox it is important to remember that insignificant changes of distance between masses can be accompanied by significant changes of speeds and accelerations. The other paradox could be explained by difference between a condition for leaving the plane which are commonly used for solving the problem theoretically and a condition used for experimental fixation that moment.

Key words: *computer experiment, critical thinking, paradox of stiff springs, didactics of physics, learning research.*

Стаття надійшла до редакції 13.05.2017