УДК 372.853+37.025.7:53.05

Мінаєв Ю.П., Лозовенко О.А., Даценко І.П.

ПРУЖИННИЙ МАЯТНИК: НЕСПОДІВАНИЙ РЕСУРС ДЛЯ РОЗВИТКУ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ

У статті автори звертають увагу на помічену ними незвичну поведінку звичайного пружинного маятника. Розв'язання рівнянь Лагранжа дозволило виявити умови, необхідні для спостереження такої поведінки, а також усунути суперечності, знайдені з цього приводу у навчальній літературі. Аналіз отриманого розв'язку привів до створення проблемної демонстрації з пружинним маятником, яку можна використовувати для розвитку критичного мислення студентів.

Ключові слова: *критичне мислення, демонстраційний експеримент, пружинний маятник, биття, маятник Вільберфорса.*

Постановка проблеми. Як відомо, ідею необхідності розвитку в учнів та студентів критичного мислення можна знайти ще у працях Сократа, а у сучасному розумінні її сформулювали Самнер (1906 р.) та Д'юї (1910 р.) (див., наприклад, [8]). Зрозуміло, що з того часу чимало науковців-методистів працювали в цьому напрямку, оскільки актуальність цього завдання з роками лише зростала. Однак, невирішених проблем ще більш ніж достатньо – наприклад, досі відчувається нестача навчальних матеріалів, якими можуть скористатися викладачі для сприяння розвитку критичного мислення студентів. Отже, розробка та презентація таких матеріалів для широкого загалу читачів є вельми **актуальною** справою.

У даній статті ми хочемо розповісти про дослідження руху добре відомого всім пружинного маятника. Хоча це дослідження було проведене разом із старшокласниками як навчальне у межах Малої академії наук, ми вважаємо, що його результати можна використовувати і під час роботи зі студентами. По-перше, зазначене дослідження може слугувати яскравою ілюстрацією необхідності володіння критичним мисленням, по-друге – за його допомогою можна продемонструвати зв'язок між шкільним, загальним та теоретичним курсами механіки, і нарешті, принаймні для найбільш підготовлених студентів, воно може стати основою для цікавого індивідуального завдання. Тому **мета** даної статті полягає у докладному описі процесу з'ясування несподіваних особливостей руху пружинного маятника.

Здавалося б, що цікавого можна знайти у цьому об'єкті, вивчення якого передбачено стандартною шкільною програмою з фізики? У певному сенсі нам пощастило – одного разу, у процесі експериментальної перевірки відомої формули для періоду коливань пружинного маятника ми разом із старшокласниками спостерігали аномальну його поведінку: крім поздовжніх (вертикальних) коливань він здійснював також крутильні коливання, амплітуда поздовжніх коливань то збільшувалася, то зменшувалася. Зрозуміло, що ми спостерігали *биття* – перехід одного типу коливань в інший та у зворотному напрямку. Із запитанням про умови виникнення цього явища ми звернулися до відповідної літератури і це несподівано привело нас до виявлення чергової проблеми.

Аналіз попередніх публікацій. Пружинний маятник, за допомогою якого можна спостерігати за переходом поздовжніх коливань у крутильні, називають маятником Вільберфорса, на честь його винахідника, який наприкінці 19-го – початку 20-го століть працював демонстратором фізичних експериментів у лабораторії імені Кавендіша (Кембрідж) [9].

У статті [9] вказується, що цей маятник рекомендується використовувати для демонстрації зв'язаних гармонічних коливань: якщо тягарець вивести з положення рівноваги, розтягнувши пружину у вертикальному напрямку, то можна спостерігати не лише вертикальні коливання тягарця, а й періодичне його обертання навколо вертикальної осі. Так само, якщо у початковий момент обережно повернути тягарець навколо цієї осі, а потім відпустити, то будуть спостерігатися і крутильні коливання, і вертикальні.

У посібнику "Лекційні демонстрації з фізики" [5] зазначається, що за певних значень параметрів тягарця та пружини можна побачити *биття*, тобто перехід одного типу коливань у інший, коли амплітуда вертикальних коливань тягарця поступово зменшується, а амплітуда крутильних коливань – зростає, а потім цей процес відбувається у зворотному напрямку. Щодо значень параметрів, за яких цей процес спостерігається найбільш яскраво, то у [9] рекомендується обирати їх таким чином, щоб частота вертикальних коливань $\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}}$ співпадала з частотою крутильних коливань $\omega_\varphi = \sqrt{\frac{D}{I}}$ (тут m – маса тягарця, k – жорсткість пружини, I – момент інерції тягарця відносно вертикальної осі, D – модуль кручення пружини).

Проте у посібнику [1, с. 47] вказується, що частота крутильних коливань має бути приблизно у два рази меншою за частоту вертикальних коливань. Отже, ми маємо суперечність. Крім того, не дивлячись на те, що і демонстрація, і навіть лабораторна робота з маятником Вільберфорса [4] описані у відповідних посібниках для вищої школи, теоретичне обґрунтування жодної з двох рекомендацій нам не вдалося знайти ані в україномовних виданнях, ані в російськомовних джерелах. Більш того, навіть у відносно нещодавно виданій антології загального фізичного практикуму [2] у підрозділі, що присвячений маятнику Вільберфорса, містяться посилання лише на American Journal of Physics. Зважаючи на таку ситуацію, розглянемо докладно задачу про рух цього маятника.

Виклад основного матеріалу статті почнемо із складання диференціальних рівнянь, що описують рух розглядуваного маятника. На нашу думку, частину цієї роботи студенти цілком можуть виконати самостійно і має сенс не позбавляти їх такої можливості.

Рівняння Лагранжа для маятника Вільберфорса. Для опису руху тіла у цьому випадку оберемо такі координати: y – координата тягарця по відношенню до положення рівноваги, φ – кут, на який повернеться тягарець відносно положення рівноваги (див. мал. 1). Тоді кінетична та потенціальна енергії тіла будуть мати вигляд

$$E_k = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}, \quad E_p = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}D\varphi^2 + \frac{1}{2}\alpha y\varphi,$$

де α – коефіцієнт, що визначає зв'язок між видовженням та закручуванням пружини (див., наприклад, [9]).

Тут треба зазначити, що коефіцієнти, які описують пружні властивості пружини (k, D і α), не є незалежними один від одного. Так, у [6, с. 399] наводиться розв'язок задачі, де одним із отриманих результатів є формула зв'язку між коефіцієнтом жорсткості k та модулем кручення D: $k = D/R^2$, де R – радіус витка пружини. Однак, у зв'язку з тим, що для проведення демонстрацій та лабораторних робіт зазвичай використовують пружини, які вже є у наявності, а не виготовляють їх спеціально, у нашому дослідженні ми не будемо вдаватися до таких подробиць.

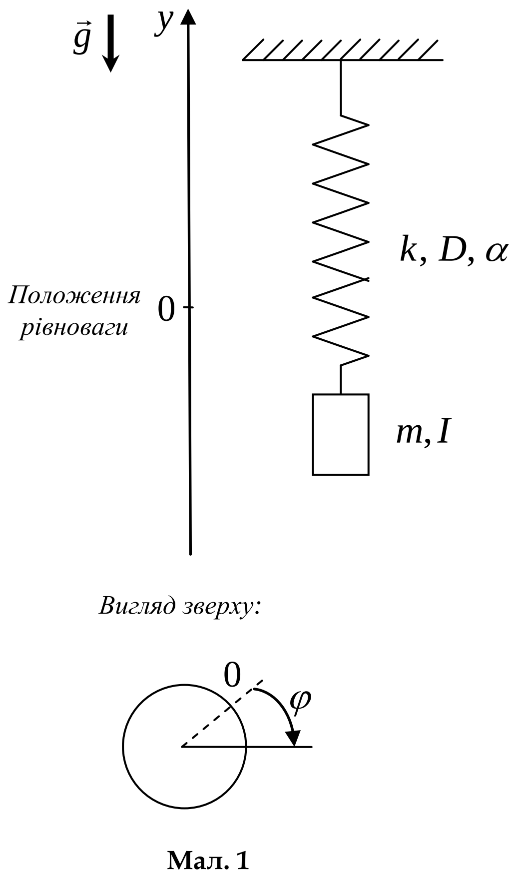
Для отримання рівнянь, що описують рух маятника, скористаємося рівняннями Лагранжа, для чого спочатку запишемо функцію Лагранжа, що дорівнює, як відомо, різниці кінетичної та потенціальної енергій системи:

$$L = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{1}{2}ky^2 - \frac{1}{2}D\varphi^2 - \frac{1}{2}\alpha y\varphi.$$

Тоді система диференціальних рівнянь матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2\varphi + \dfrac{\alpha}{2I}y = 0, \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y + \dfrac{\alpha}{2m}\varphi = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

де $\omega_y = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $\omega_\varphi = \sqrt{\dfrac{D}{I}}$.



Мал. 1

Аналітичне розв'язування отриманої системи диференціальних рівнянь. Як правило, під час розгляду класичної задачі про биття для розв'язання відповідної системи рівнянь використовують лінійне перетворення, тобто здійснюють перехід до нових координат, у яких рівняння системи (1) запишуться як рівняння для двох незалежних осциляторів (див., наприклад [3]). Так само можна вчинити і у нашому випадку, але це потребує чималої і досить нудної роботи із громіздкими формулами, тому ми радимо піти іншим шляхом: виразити одну з координат, наприклад y, з рівняння системи, підставити її та відповідну другу похідну у інше, та отримати таке:

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4} + \left(\omega_\varphi^2 + \omega_y^2\right)\ddot{\varphi} + \left(\omega_y^2\omega_\varphi^2 - \frac{\alpha^2}{4mI}\right)\varphi = 0.$$

Для розв'язання цього рівняння використаємо один зі стандартних прийомів (див., наприклад, [7, с. 24-28]): будемо шукати розв'язок у вигляді $\varphi(t) = a\,e^{i\omega t}$. Підставивши цю функцію та відповідні похідні до отриманого диференціального рівняння, матимемо алгебраїчне біквадратне рівняння відносно ω, розв'язок якого надасть нам вирази для частот двох, так званих, *нормальних мод* розглядуваної системи:

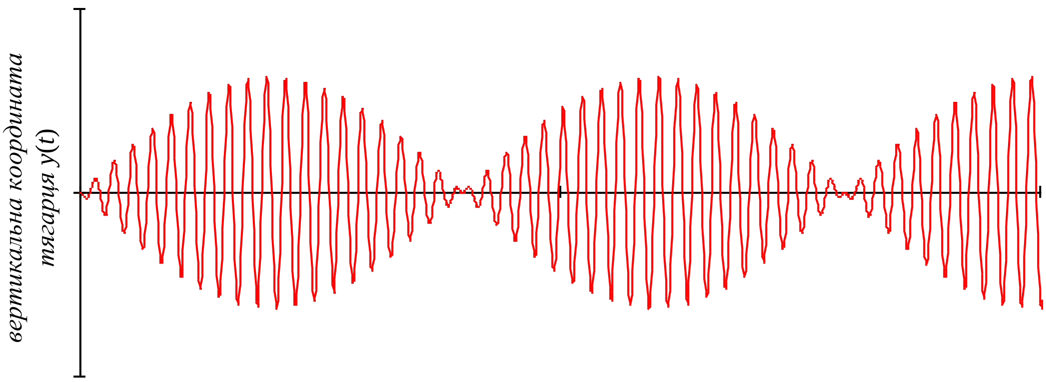
$$\omega^4 - \left(\omega_y^2 + \omega_\varphi^2\right)\omega^2 + \left(\omega_y^2\omega_\varphi^2 - \frac{\alpha^2}{4mI}\right) = 0,$$

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{2}\left(\omega_y^2 + \omega_\varphi^2 - \sqrt{\left(\omega_y^2 - \omega_\varphi^2\right)^2 + \frac{\alpha^2}{mI}}\right)\right)^{1/2},$$

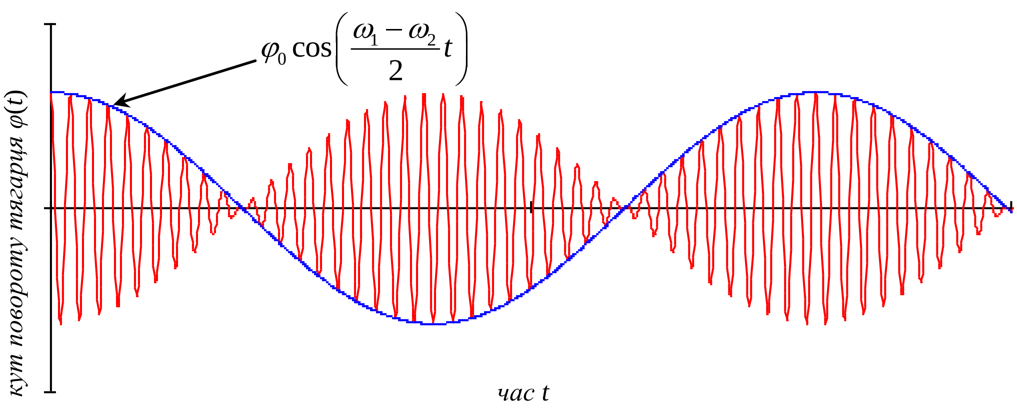
$$\omega_2 = \left(\frac{1}{2}\left(\omega_y^2 + \omega_\varphi^2 + \sqrt{\left(\omega_y^2 - \omega_\varphi^2\right)^2 + \frac{\alpha^2}{mI}}\right)\right)^{1/2}.$$

Тепер вже можна визначити, в якому з джерел була правдива інформація щодо умов, за яких у розглядуваній системі можна спостерігати биття. Як відомо, биття у системі з двома модами спостерігаються у тому випадку, коли різниця між нормальними частотами є малою [3, с. 43]. Для розглядуваного маятника найменша різниця між частотами ω_1 і ω_2 досягається за умови $\omega_y = \omega_\varphi$. Отже, рекомендація авторів статті [9] виявилася правильною, на відміну від рекомендації авторів посібника [1].

Цей висновок можна додатково проілюструвати, використавши, наприклад, Mathcad (див. мал. 2 і 3). Дійсно, за вказаної умови $\omega_y = \omega_\varphi$ будуть спостерігатися биття.

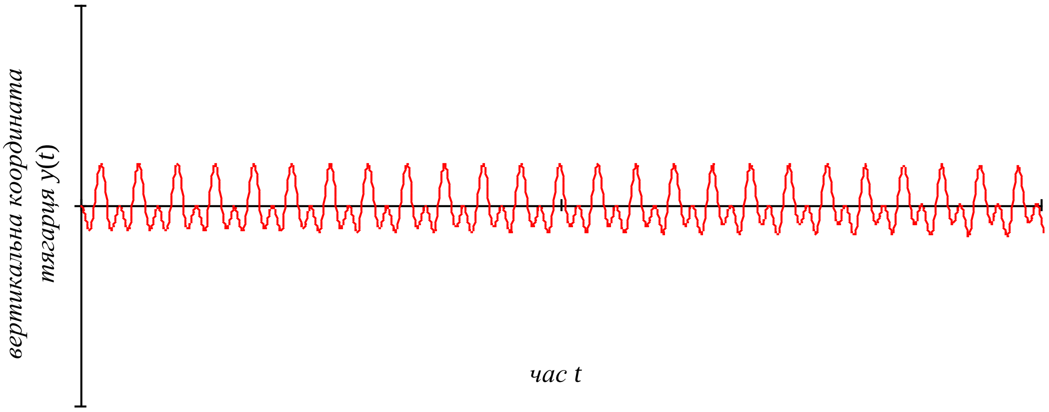


Мал. 2. Залежність $y(t)$ від часу у випадку $\omega_y = \omega_\varphi$ за таких початкових умов:
$\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot\varphi(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot y(0) = 0$.



Мал. 3. Залежність $\varphi(t)$ та її обвідна у випадку $\omega_y = \omega_\varphi$ за таких початкових умов:
$\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot\varphi(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot y(0) = 0$.

Повернемося до твердження, яке було знайдено нами у посібнику [1] про те, що для спостереження явища биття частота крутильних коливань має бути у два рази меншою за частоту вертикальних коливань, і побудуємо графік залежності $y(t)$ у випадку $\omega_y = 2\omega_\varphi$, не змінюючи початкові умови щодо координат і швидкостей. Як можна побачити з мал. 4, отриманий графік навряд чи можна вважати яскравою ілюстрацією явища биття нормальних мод.



Мал. 4. Залежність $y(t)$ у випадку $\omega_y = 2\omega_\varphi$ за таких початкових умов:
$\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

До речі, до створення подібних ілюстративних матеріалів можна залучити доволі широкий загал студентів – це завдання не є складним, проте важливим з точки зору налагодження міжпредметних зв'язків.

Демонстрація з "вимкненням" однієї з мод. Розглянутий вище розв'язок задачі про рух маятника Вільбефорса дозволяє не лише з'ясувати умови виникнення биття і знайти помилку у навчальній літературі. Наразі ми хочемо запропонувати проблемну демонстрацію з "вимкненням" однієї з мод. Для цієї демонстрації потрібно завчасно експериментально підібрати необхідне співвідношення між початковим видовженням пружини і початковим кутом повороту тягаря, щоб після того, як демонстратор відпустить тягарець, який він утримує в необхідному початковому положенні, можна було спостерігати звичайні гармонічні коливання з практично незмінною амплітудою.

Після того, нічого не змінюючи ані в параметрах тягарця, ані в параметрах пружини, експеримент повторюють ще раз ніби в тих самих умовах. Але тепер демонстратор, не відводячи центр мас тягарця з його положення рівноваги, декілька разів обертає тягарець навколо вертикальної осі, закручуючи пружину. Після того, як тягарець відпустять, він почне не лише обертатися навколо вертикальної осі, а й коливатися у вертикальному напрямку. При цьому амплітуда таких коливань буде то збільшуватися, то зменшуватися. Як можна пояснити такі розбіжності в поведінці того ж самого маятника? Розгадка криється у початкових умовах.

З'ясування початкових умов для "вимкнення" однієї з мод коливань. Отримані вище результати дозволяють записати залежність координати y від часу в такому вигляді:

$$y(t) = A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t + B_2 \sin\omega_2 t,$$

де константи A_1, B_1, A_2 і B_2 залежать лише від початкових умов. Розглянемо випадок, коли $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$. Саме такий вибір початкових умов обумовлений тим фактом, що задавати певні ненульові значення швидкостей у початковий момент часу набагато складніше, ніж значення початкової координати.

Після досить нудних, але нескладних перетворень, отримуємо, що

$$y(t) = \left(\frac{y_0\left(\omega_1^2 - \omega_\varphi^2\right)}{\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)} - \frac{2I\varphi_0}{\alpha\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)}\left(\omega_1^2 - \omega_\varphi^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega_\varphi^2\right) \right)\cos\omega_1 t +$$

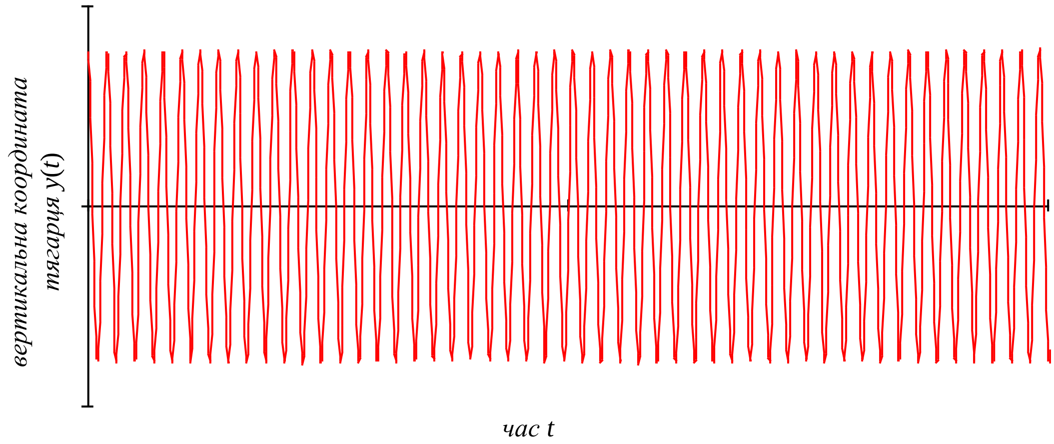
$$+\left(\frac{2I\varphi_0}{\alpha\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)}\left(\omega_1^2 - \omega_\varphi^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega_\varphi^2\right) - \frac{y_0\left(\omega_2^2 - \omega_\varphi^2\right)}{\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)} \right)\cos\omega_2 t.$$

Зрозуміло, що вибором початкових умов можна досягти ситуації, коли одна з мод буде "вимкнена" і будуть спостерігатися гармонічні коливання. Знайдемо ці умови, прирівнявши по черзі до нуля коефіцієнти при $\cos\omega_1 t$ та $\cos\omega_2 t$ у виразі для $y(t)$.

Для "вимкнення" моди з частотою ω_1 отримуємо $y_{02} = \dfrac{2I\varphi_0}{\alpha}\left(\omega_2^2 - \omega_\varphi^2\right)$, де y_{02} – початкова координата, за якої при даному початковому куті φ_0 буде спостерігатися лише друга мода.

Для "вимкнення" моди з частотою ω_2: $y_{01} = \dfrac{2I\varphi_0}{\alpha}\left(\omega_1^2 - \omega_\varphi^2\right)$, де y_{01} – початкова координата, за якої при даному початковому куті φ_0 буде спостерігатися лише перша мода.

Для випадку рівності частот поздовжніх та крутильних коливань "вимкнення" мод відбувається за таких початкових координат: $y_{01}^b = -\sqrt{\dfrac{I}{m}}\varphi_0$, $y_{02}^b = \sqrt{\dfrac{I}{m}}\varphi_0$. Це також можна додатково проілюструвати за допомогою Mathcad (див. мал. 5).



Мал. 5. Залежність $y(t)$ за умови $\omega_y = \omega_\varphi$,
але при спеціально підібраних початкових умовах,
за яких не спостерігається мода з частотою ω_1

Зазвичай маятник Вільберфорса виготовляють так, щоб можна було легко змінювати момент інерції тягарця, не змінюючи його маси. У цьому випадку зручно демонструвати яскравий ефект биття нормальних мод, досягаючи необхідного співвідношення частот підбором лише одного параметру без зміни інших. Крім того, можна легко продемонструвати, як при порушенні фіксованого співвідношення частот ефект биття мод стає не таким виразним. У запропонованій демонстрації зникнення явища биття мод досягається не зміною параметра, а вибором початкових умов.

Висновки. У цій статті ми намагалися докладно описати процес з'ясування несподіваних особливостей руху пружинного маятника та підготовки цікавої проблемної демонстрації, і тим самим зробити певний внесок у збільшення кількості навчальних матеріалів, що можна використовувати для сприяння розвитку критичного мислення студентів. Що ж до **перспектив подальших досліджень**, то у межах того самого навчального дослідження, що проведене разом із старшокласниками, ми спостерігали й іншу цікаву поведінку пружинного маятника, а саме – биття поперечно-поздовжніх коливань. Як не дивно, але і в цьому випадку деякі твердження авторів різних навчальних посібників знаходяться у протиріччі одні до одних. А така ситуація є гарним приводом для написання окремої статті.

Використані джерела

1. Алешкевич В.А. Колебания и волны. Лекции. (Университетский курс общей физики) / В.А. Алешкевич, Л.Г. Деденко, В.А. Караваев. – М. : Физический факультет МГУ, 2001. – 144 с.
2. Козлов В.И. Антология общего физического практикума / В.И. Козлов. – М.: Физический факультет МГУ, 2010. – . – Ч.1. Механика. – 2010. – 248 с.

3. Крауфорд Ф. Волны: Учебное руководство / Под ред. А.И. Шальникова, А.О. Вайсенберга. – [3-е изд.]. – М.: Наука, 1984. – 512 с. – (Берклеевский курс физики).
4. Лабораторная работа №5. Определения частоты биений связанных колебаний. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://physolymp-fml31-r.1gb.ru/olymp/files/f358.pdf.
5. Лекционные демонстрации по физике / [М.А. Грабовский, А.Б. Млодзеевский, Р.В. Телеснин и др.]. – М., 1972. – 640 с.
6. Сивухин Д.М. Общий курс физики / Д.М. Сивухин. – М., 1974. – . – Т. I: Механика. – 1974. – 520 стр. : ил.
7. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 352 с.
8. A Brief History of the Idea of Critical Thinking. Principal authors: Richard Paul, Linda Elder, and Ted Bartell. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://www.criticalthinking.org/pages/a-brief-history-of-the-idea-of-critical-thinking/408
9. Berg R.E. Wilberforce pendulum oscillations and normal modes / R.E. Berg, T.S. Marshall // Amer. J. Phys. – 1991. – 59 (1). – pp. 32-38.

Minaiev Yu., Lozovenko O., Datsenko I.

SPRING PENDULUM: AN UNEXPECTED RESOURCE FOR CRITICAL THINKING

The importance of teaching critical thinking skills is undoubted in modern education. Therefore, it is especially indispensable to organize learning process for physics teachers-to-be such that it stimulates the development of their critical thinking. One way to do it is to simulate for students situations which could happen during usual school lessons and require from a teacher applying critical thinking.

One of such model situation is considered in the article: a teacher showing a harmonic oscillation of a spring pendulum notices that amplitude of vertical oscillations decreases, a mass hanging on the spring begins to rotate, then the process occurs backward and repeats. Even if a teacher understood that seen phenomenon is a beat and tried to puzzle out what was going on in details, he/she could meet inconsistent statements about conditions when beats appear. A brief check shows the existence of two different recommendations for adjusting such beats (see 'Wilberforce pendulum oscillations').

The direct solution of this problem would be useful for students so far as it requires applying both physics and mathematics: writing the Lagrangian for the system, solving the differential equations, analyzing the obtained solution etc.

It is efficient to pay students' attention to the fact that they could 'turn off' beats by matching initial conditions, and therefore, Wilberforce pendulum can oscillate harmonically. It would be useful if students realized in that way the results they obtained could be used in classroom. For example, a strange behavior of a spring pendulum which could oscillate in two different manners has a good chance to puzzle students (since a teacher doesn't tell students about the influence of initial conditions).

Key words: *critical thinking, physics demonstration, spring pendulum, beats, Wilberforce pendulum.*

Стаття надійшла до редакції 10.05.2016